27.09.2011

LOGICA

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

Proposizioni: p, q

- $p \vee q$ — disgiunzione logica: "p unito q" / p o q
  È vera se almeno una tra p e q è vera.
- $p \wedge q$ — congiunzione logica: "p intersecato q" / p e q
  È vera se sono vere sia p che q.
- $\neg p$ — opposto di p / "non p"

Queste non sono relazioni indipendenti tra di loro.

- $p \wedge q = \neg(\neg p \vee \neg q)$
- $p \vee q = \neg(\neg p \wedge \neg q)$
- $p \Rightarrow q = (\neg p \vee q)$ — implicazione logica: "p implica q" / da p discende q

per definizione, che si indica con $=:$ $\equiv$

Se p è vera: $\neg p$ è falsa, allora deve essere per forza vera q per la definizione dell'unione (vera almeno una delle due).

Se p è falsa: $\neg p$ è vera, q può essere ciò che vuole.

p falsa, q è falsa: $(1=2) \Rightarrow (2=3)$ — p falsa, q è vera: $(1=2) \Rightarrow (2=2)$

$\neg q \Rightarrow \neg p$ — q è falsa, allora affinché $(\neg p \vee q)$ sia vera, $\neg p$ deve essere per forza vera.

- $p \Leftrightarrow q = (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ — doppia implicazione: "p coimplica q"

$\neg p \vee q$ e $\neg q \Rightarrow \neg p$ sono vere (della implicazione)
invece $\neg p \Rightarrow \neg q$ è falsa.

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

A → insieme, famiglia, classe

Esiste un solo $\emptyset$, insieme che non ha elementi

Occorre distinguere tra:

a : oggetto $\quad a \in A$

$\{a\}$ l'insieme che ha come elemento a $\quad \{a\} \subseteq A$ (è contenuto)

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

$a, b \in A$

$\{a, b\} = \{b, a\}$ con $a \neq b$ è un paio

$\{a, b, c\}$ è un trio

Coppia (a, b) c'è un ordine. (a, b) e (b, a) sono diverse. Si equivalgono solo se $a = b$.

Da 1 paio $\{a, b\}$ si possono costruire due coppie (a, b) e (b, a)

$(a, b) = \{a, \{a, b\}\}$

$(b, a) = \{b, \{a, b\}\}$

Abbiamo due insiemi A e B.

Sono disgiunti se $A \cap B = \emptyset$

$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$

$B \times A = \{(b, a) \mid b \in B, a \in A\}$

$(A \times B) \times C = \{(\alpha, c) \mid \alpha \in (A \times B), c \in C\} = \{(a, b), c\}$

$A \times (B \times C) = \{(a, \beta) \mid a \in A, \beta \in (B \times C)\} = (a, (b, c))$

Anche se la definizione è diversa, da $A \times B \times C$ si ottengono le terne (a, b, c)

Applicazioni da A a B

$\varphi : A \to B$

- A dominio
- B codominio
- → legge che ad ogni elemento di A fa corrispondere un solo elemento di B.

se cambio uno di questi (tre) elementi, cambia l'intera applicazione

$\forall\, a \in A \to \varphi(a) \in B$, oggetto in B trasformato da A (legge, regola)

Immagine di φ Im φ $\varphi(A)$

$$\{\varphi(a) \mid a \in A\} \subseteq B$$

- L'applicazione è suriettiva se $\varphi(A) = B$

  Preso un elemento di B, trovo almeno un elemento di A che lo corrisponde.

  Se l'applicazione non è suriettiva ci sono degli elementi in B che non corrispondono da A (non vengono da nessuno).

- L'applicazione è iniettiva se:

  $a, a' \quad a \neq a' \Rightarrow \varphi(a) \neq \varphi(a')$

  Scelti due elementi diversi nel dominio, le loro immagini sono diverse.

  Non iniettiva: $a \neq a' \Rightarrow \varphi(a) = \varphi(a')$

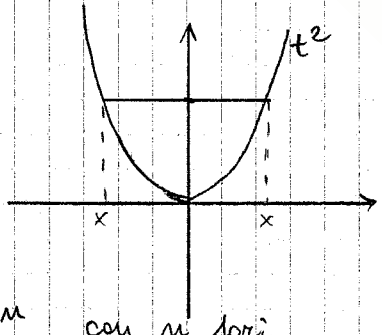
  Oggetti diversi vanno a finire in oggetti diversi; un oggetto in arrivo proviene da un solo oggetto in partenza (non da due distinti).

[ESEMPIO. $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \varphi(t) = t^2$ non è suriettiva, non è iniettiva

Se si pone: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ φ è suriettiva

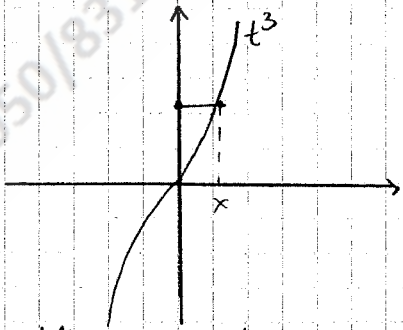
Se si pone: $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ φ è iniettiva $\varphi(8) = 64 \quad \varphi(-8) = 64$

Per suriettivizzare si restringe il codominio.
Per iniettivizzare si restringe il dominio.) l'applicazione cambia



t^n con n pari

Non iniettive.



t^n con n dispari

Iniettiva.

Attenzione a non confondere l'iniettività con la definizione di applicazione (cioè ad ogni oggetto di partenza c'è un solo oggetto di arrivo).

$\sigma: A \times B \to C$

$\sigma: (a, b) \in C$ operazione binaria

$A \times B \times C \to D$

$(a, b, c) \in D$ operazione ternaria

$A \times A \to A$ $\quad A \times B \to A$ $\quad A \times A \to B$

operazioni interne ad A

$*: A \times A \to A$ $\quad *(a, b) \in A$

$a * b$ operazione

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

$\mathbb{N}$ naturali $= \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$

$\mathbb{Z}$ relativi o interi $= \{\ldots -2, -1, 0, 1, 2 \ldots\}$

$\mathbb{Z}^+$ interi positivi → i naturali senza lo 0

Magma: un insieme M in cui è definita una operazione binaria che ad ogni coppia di elementi (a, b) associa l'elemento $a * b$.

$(N, +)$ $\quad (N, \cdot)$ $\quad (\mathbb{Z}^+, \cdot)$ $\quad (\mathbb{Z}, -)$

Se non si dà nessun vincolo all'operazione, tutto è magmatizzabile.

$a * b = b * a \quad \forall\, a, b \in A$ COMMUTATIVO o ABELIANO (da Abel)

$(a * b) * c = a * (b * c) \quad \forall\, a, b, c \in A$ ASSOCIATIVO.

si scriverà allora $(a * b * c)$

ESEMPIO. LA MORRA CINESE $*$

φ forbice, σ sasso, γ carta:

$\varphi * \sigma = \sigma$ $\quad \varphi * \gamma = \varphi$ $\quad \sigma * \gamma = \gamma$

$\sigma * \varphi = \sigma$ $\quad \gamma * \varphi = \varphi$ $\quad \gamma * \sigma = \gamma$

$(\varphi * \sigma) * \gamma = \sigma * \gamma = \gamma$

$\varphi * (\sigma * \gamma) = \varphi * \gamma = \varphi$

La morra cinese è una operazione commutativa ma non associativa.